模块二 求通项与求和

第 1 节 数列通项的核心求法（★★★）

内容提要

求通项是数列板块的核心问题之一，本节归纳几种常见的求通项的题型.

1．累加法：若数列$\{a_n\}$满足递推公式$a_n-a_{n-1}=f(n)(n\ge 2)$，且$f(n)$能够求和（常见的例如$a_n-a_{n-1}=n$，$a_n-a_{n-1}=2^n$，$a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{n(n+1)}$等），则可用累加法求$\{a_n\}$的通项公式，具体操作步骤如下.

①取$n=2$，3，…，n得到$\begin{cases}a_2-a_1=f(2)\\a_3-a_2=f(3)\\\quad\cdots\cdots\\a_{n-1}-a_{n-2}=f(n-1)\\a_n-a_{n-1}=f(n)\end{cases}$；

②将以上各式累加得$a_n-a_1=f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$，于是$a_n=f(2)+f(3)+\cdots+f(n)+a_1$；

③上面求出的a_n只在$n\ge 2$时成立，所以最后单独验证a_1是否满足该结果.

2．累乘法：若数列$\{a_n\}$满足递推公式$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)(n\ge 2)$，且$f(n)$能求积（常见的例如$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n+1}$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2^n$等），则可用累乘法求$\{a_n\}$的通项公式，具体操作步骤如下.

①将递推公式$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)$从$n=2$开始，一直写到$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)$，得到$\dfrac{a_2}{a_1}=f(2)$，$\dfrac{a_3}{a_2}=f(3)$，$\dfrac{a_4}{a_3}=f(4)$，…，$\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=f(n-1)$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)$；

②将上述$n-1$个式子累乘可得$\dfrac{a_n}{a_1}=f(2)f(3)\cdots f(n)$，于是$a_n=f(2)f(3)\cdots f(n)a_1$；

③上面求出的a_n只在$n\ge 2$时成立，所以最后单独验证a_1是否满足该结果.

3．带提示的构造法：若题干给出数列$\{a_n\}$的递推公式，让我们先证明与a_n有关的某数列为等差数列或等比数列，再求$\{a_n\}$的通项公式. 这类题要证的结论其实是提示了我们该怎样构造新数列，证出结论后，可先求出构造的新数列的通项，再求$\{a_n\}$.

4．等价变形：若题干给出的递推公式较复杂，则可对递推公式变形，化简递推公式，或通过变形构造出新数列来求通项.

典型例题

类型Ⅰ：累加法求通项

【例 1】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=n+1$，求$\{a_n\}$的通项公式.

解：（看到$a_{n+1}-a_n=n+1$这样的递推公式，想到用累加法求a_n）

由题意，当 $n\ge 2$ 时，$\begin{cases}a_2-a_1=2\\a_3-a_2=3\\\cdots\cdots\\a_{n-1}-a_{n-2}=n-1\\a_n-a_{n-1}=n\end{cases}$，将以上各式累加可得 $a_n-a_1=2+3+\cdots+n$，

结合 $a_1=1$ 可得 $a_n=a_1+2+3+\cdots+n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，

又 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

【反思】遇到 $a_{n+1}-a_n=f(n)$ 这类递推公式，考虑用累加法求通项，别忘了检验 a_1 是否满足累加的结果.

【变式 1】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，且 $(n+1)a_{n+1}-na_n=2^n$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（把 na_n 看作 b_n，则 $(n+1)a_{n+1}$ 即为 b_{n+1}，故 $b_{n+1}-b_n=2^n$，这就是累加法的适用情形了，可先求 b_n）

设 $b_n=na_n$，则 $b_1=a_1=2$，且 $(n+1)a_{n+1}-na_n=2^n$ 即为 $b_{n+1}-b_n=2^n$，

所以当 $n\ge 2$ 时，$\begin{cases}b_2-b_1=2^1\\b_3-b_2=2^2\\\cdots\cdots\\b_{n-1}-b_{n-2}=2^{n-2}\\b_n-b_{n-1}=2^{n-1}\end{cases}$，将以上各式累加可得 $b_n-b_1=2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}$，

故 $b_n=2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}+b_1=\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}+2=2^n$，

又 $b_1=2$ 也满足上式，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $b_n=2^n$，即 $na_n=2^n$，故 $a_n=\frac{2^n}{n}$.

【变式 2】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且 $a_{n+1}-3a_n=2^n$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（本题不是 $a_{n+1}-a_n$ 这种结构，但可在 $a_{n+1}-3a_n=2^n$ 两端同除以 3^{n+1} 变为该结构）

因为 $a_{n+1}-3a_n=2^n$，所以 $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{3a_n}{3^{n+1}}=\frac{2^n}{3^{n+1}}$，故 $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^n$ ①，

（若将 $\frac{a_n}{3^n}$ 看成 b_n，则式①即为 $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^n$，可用累加法先求 b_n）

令 $b_n=\frac{a_n}{3^n}$，则 $b_1=\frac{a_1}{3}=\frac{1}{3}$，且 $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^n$，

所以当 $n\ge 2$ 时，$b_2-b_1=\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^1$，$b_3-b_2=\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^2$，$\cdots$，$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^{n-1}$，

各式累加得 $b_n-b_1=\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^1+\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^2+\cdots+\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^{n-1}=\frac{1}{3}\times\frac{\frac{2}{3}\times[1-(\frac{2}{3})^{n-1}]}{1-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}-(\frac{2}{3})^n$，

所以 $b_n=\frac{2}{3}-(\frac{2}{3})^n+b_1=\frac{2}{3}-(\frac{2}{3})^n+\frac{1}{3}=1-(\frac{2}{3})^n$，又 $b_1=\frac{1}{3}$ 也满足上式，所以 $b_n=1-(\frac{2}{3})^n(n\in\mathbf{N}^*)$，

因为 $b_n=\frac{a_n}{3^n}$，所以 $\frac{a_n}{3^n}=1-(\frac{2}{3})^n$，故 $a_n=3^n-2^n$.

【总结】像 $a_{n+1}-a_n=f(n)$ 这类递推公式，可考虑用累加法求 a_n. 而对于 $a_{n+1}-pa_n=f(n)(p\neq 0,p\neq 1)$ 这类结构，可两端同除以 p^{n+1}，化为 $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}-\frac{a_n}{p^n}=\frac{f(n)}{p^{n+1}}$，再用累加法求出 $\left\{\frac{a_n}{p^n}\right\}$ 的通项，从而求得 a_n.

类型Ⅱ：累乘法求通项

【例 2】已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=3(1+\frac{1}{n})a_n$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（将所给递推公式变形，即可得到 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ 这种结构，故用累乘法求 $\{a_n\}$ 的通项公式）

因为 $a_{n+1}=3(1+\frac{1}{n})a_n$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3\cdot\frac{n+1}{n}$，

故当 $n\geq 2$ 时，$\frac{a_2}{a_1}=3\times\frac{2}{1}$，$\frac{a_3}{a_2}=3\times\frac{3}{2}$，$\frac{a_4}{a_3}=3\times\frac{4}{3}$，…，$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=3\cdot\frac{n-1}{n-2}$，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=3\cdot\frac{n}{n-1}$，

各式累乘得 $\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=3\times\frac{2}{1}\times 3\times\frac{3}{2}\times 3\times\frac{4}{3}\times\cdots\times 3\cdot\frac{n-1}{n-2}\times 3\cdot\frac{n}{n-1}$，化简得：$\frac{a_n}{a_1}=n\cdot 3^{n-1}$，

又 $a_1=1$，所以 $a_n=n\cdot 3^{n-1}$，因为 $a_1=1$ 也满足 $a_n=n\cdot 3^{n-1}$，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=n\cdot 3^{n-1}$.

【变式】在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=2$，$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$，则 $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_{99}a_{100}=$______.

解析：本题给的是 $\frac{a_{n+2}}{a_n}$，不是 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$，但结构相近，我们也试试用累乘法，看能得出什么结果，

由题意，$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$，所以当 $n\geq 2$ 时，$\frac{a_3}{a_1}=\frac{2}{1}$，$\frac{a_4}{a_2}=\frac{3}{2}$，$\frac{a_5}{a_3}=\frac{4}{3}$，…，$\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=\frac{n}{n-1}$，

将以上各式累乘可得 $\frac{a_3}{a_1}\cdot\frac{a_4}{a_2}\cdot\frac{a_5}{a_3}\cdots\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}$，所以 $\frac{a_na_{n+1}}{a_1a_2}=n$，故 $a_na_{n+1}=a_1a_2n=2n$，

又 $a_1a_2=2$ 也满足上式，所以 $a_na_{n+1}=2n$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，

我们发现累乘后没有求出 a_n，而是求出了 a_na_{n+1}，而本题要求的恰好也就是数列 $\{a_na_{n+1}\}$ 的前 99 项和，

所以 $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_{99}a_{100}=2+4+6+\cdots+198=\frac{99\times(2+198)}{2}=9900$.

答案：9900

【总结】若给出 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ 这类递推公式，可用累乘法求 $\{a_n\}$ 的通项公式；若给出的是 $\frac{a_{n+2}}{a_n}=f(n)$，则累乘后可以求得 a_na_{n+1} 的结果.

类型III：带提示的构造法求通项

【例 3】已知各项均不为 0 的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n-a_{n+1}=a_na_{n+1}$，求证：$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（要证结论成立，只需证 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$ 为常数，故在递推式两端同除以 a_na_{n+1}，凑出 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$ 这一结构）

因为 $a_n-a_{n+1}=a_na_{n+1}$，所以 $\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}=1$，从而 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$，故 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列，公差为 1，

又 $a_1=1$，所以 $\dfrac{1}{a_1}=1$，故 $\dfrac{1}{a_n}=1+(n-1)\times 1=n$，所以 $a_n=\dfrac{1}{n}$.

【变式】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=1-\dfrac{1}{4a_n}$，设 $b_n=\dfrac{2}{2a_n-1}$，证明 $\{b_n\}$ 是等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（要证 $\{b_n\}$ 是等差数列，只需证 $b_{n+1}-b_n$ 为常数）由题意，$b_{n+1}-b_n=\dfrac{2}{2a_{n+1}-1}-\dfrac{2}{2a_n-1}$ ①，

（要进一步计算此式，可结合条件中的递推公式）又 $a_{n+1}=1-\dfrac{1}{4a_n}$，代入式①可得

$$b_{n+1}-b_n=\frac{2}{2(1-\frac{1}{4a_n})-1}-\frac{2}{2a_n-1}=\frac{2}{1-\frac{1}{2a_n}}-\frac{2}{2a_n-1}=\frac{4a_n}{2a_n-1}-\frac{2}{2a_n-1}=\frac{4a_n-2}{2a_n-1}=2,$$

所以 $\{b_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，（只要再求出 b_1，就能代等差数列通项公式求得 b_n，进而求得 a_n）

因为 $a_1=1$，所以 $b_1=\dfrac{2}{2a_1-1}=2$，故 $b_n=2+(n-1)\times 2=2n$，即 $\dfrac{2}{2a_n-1}=2n$，所以 $a_n=\dfrac{n+1}{2n}$.

【例 4】数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}-4a_n=2^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，证明 $\{a_n+2^n\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（要证 $\{a_n+2^n\}$ 是等比数列，只需证 $\dfrac{a_{n+1}+2^{n+1}}{a_n+2^n}$ 为常数，故将条件往 $a_{n+1}+2^{n+1}$ 和 a_n+2^n 凑）

因为 $a_{n+1}-4a_n=2^{n+1}$，所以 $a_{n+1}=4a_n+2^{n+1}$，故 $a_{n+1}+2^{n+1}=4a_n+2^{n+1}+2^{n+1}=4a_n+2^{n+2}=4(a_n+2^n)$ ①，

（不要急于将 a_n+2^n 除到左侧，需先说明数列 $\{a_n+2^n\}$ 的首项不为 0，否则该数列全为 0）

又 $a_1=2$，所以 $a_1+2^1=4\neq 0$，结合式①知数列 $\{a_n+2^n\}$ 的所有项均不为 0，故 $\dfrac{a_{n+1}+2^{n+1}}{a_n+2^n}=4$，

所以 $\{a_n+2^n\}$ 是首项和公比均为 4 的等比数列，从而 $a_n+2^n=4\times 4^{n-1}=4^n$，故 $a_n=4^n-2^n$.

【反思】 在证明 $\{b_n\}$ 为等比数列时，得到 $b_{n+1}=qb_n$ 后，还需验证 $b_1\neq 0$，请注意此细节.

【变式】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=x$，其中 x 为实常数，且 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n-n+1$，记 $b_n=a_{n+1}-a_n-n$，

数列$\{b_n\}$是否为等比数列？说明理由，并求b_n.

解：（要判断$\{b_n\}$是否为等比数列，就看是否满足$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$为常数，可由所给递推公式建立b_{n+1}与b_n的关系）

因为$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n-n+1$，所以$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}-n-1=(3a_{n+1}-2a_n-n+1)-a_{n+1}-n-1$

$=2(a_{n+1}-a_n-n)=2b_n$ ①，（有了$b_{n+1}=2b_n$，只需再看b_1是否为0，就能确定$\{b_n\}$是否为等比数列了）

因为$a_1=1$，$a_2=x$，所以$b_1=a_2-a_1-1=x-1-1=x-2$，（b_1是否为0由x是否等于2决定，故讨论）

当$x=2$时，$b_1=0$，结合式①可得$b_n=0$恒成立，所以$\{b_n\}$不是等比数列；

当$x\neq 2$时，$b_1\neq 0$，结合式①可得$\{b_n\}$所有项均不为0，所以式①可变形成$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$，

从而$\{b_n\}$是首项为$x-2$，公比为2的等比数列，故$b_n=(x-2)\cdot 2^{n-1}$.

【总结】上面两道例题及变式都是让我们先证等差、等比数列，再求通项a_n. 这类题可根据结论的提示对所给递推公式变形. 而有些题没有提示，这就需要我们自己用待定系数法构造新数列，如下面的类型Ⅳ.

类型Ⅳ：待定系数法构造

【例5】数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=-a_n+2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，求$\{a_n\}$的通项公式.

解：（本题未提示如何构造，可用待定系数法发掘，注意到递推式中除a_{n+1}和a_n，余下的为关于n的一次函数，这种结构的前后项可设为$An+B$和$A(n+1)+B$，故设$a_{n+1}+A(n+1)+B=-(a_n+An+B)$，即

$a_{n+1}=-a_n-2An-A-2B$，与$a_{n+1}=-a_n+2n+1$对比可得$\begin{cases}-2A=2\\-A-2B=1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}A=-1\\B=0\end{cases}$）

因为$a_{n+1}=-a_n+2n+1$，所以$a_{n+1}-(n+1)=-a_n+2n+1-(n+1)=-a_n+n=-(a_n-n)$ ①，

（此时还不能下结论$\{a_n-n\}$为等比数列，需验证其首项不为0）

又$a_1=2$，所以$a_1-1=1\neq 0$，结合式①可知数列$\{a_n-n\}$的所有项均不为0，故$\dfrac{a_{n+1}-(n+1)}{a_n-n}=-1$，

所以$\{a_n-n\}$是首项为1，公比为-1的等比数列，从而$a_n-n=(-1)^{n-1}$，故$a_n=n+(-1)^{n-1}$.

【例6】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，求$\{a_n\}$的通项公式.

解：（本节已经给出了本题的累加法解法，其实也能用待定系数法构造，注意到递推公式中除了a_{n+1}和a_n，余下的为2^n，这种结构的前后项可设为$A\cdot 2^n$和$A\cdot 2^{n+1}$，故可设$a_{n+1}+A\cdot 2^{n+1}=3(a_n+A\cdot 2^n)$，整理得：$a_{n+1}=3a_n+A\cdot 2^n$，与$a_{n+1}=3a_n+2^n$对比可得$A=1$）

因为$a_{n+1}=3a_n+2^n$，所以$a_{n+1}+2^{n+1}=3a_n+2^n+2^{n+1}=3a_n+3\times 2^n=3(a_n+2^n)$，

又$a_1=1$，所以$\{a_n+2^n\}$是首项$a_1+2^1=3$，公比为3的等比数列，从而$a_n+2^n=3^n$，故$a_n=3^n-2^n$.

【总结】对于构造法求通项，高考的要求较低，需要我们自行构造的，一般不复杂，其核心是将递推式中除了a_{n+1}和a_n的其余部分也化成前后项，并分配给a_n和a_{n+1}，这一过程常用待定系数法来完成.

类型Ⅴ：等价变形求通项

【例 7】已知各项都为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n^2-(2a_{n+1}-1)a_n-2a_{n+1}=0$，求$\{a_n\}$的通项公式.

解：（所给递推公式结构较复杂，但观察发现若将次数相同的放一起，可因式分解）

$a_n^2-(2a_{n+1}-1)a_n-2a_{n+1}=a_n^2-2a_{n+1}a_n+a_n-2a_{n+1}=a_n(a_n-2a_{n+1})+a_n-2a_{n+1}=(a_n-2a_{n+1})(a_n+1)=0$ ①，

因为数列$\{a_n\}$各项都为正数，所以$a_n+1>0$，从而式①可化为$a_n-2a_{n+1}=0$，故$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$，

所以$\{a_n\}$是首项为 1，公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列，故$a_n=(\dfrac{1}{2})^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

【反思】当递推公式较复杂时，可先对递推公式变形，将其化简，因式分解是可以考虑的方向.

【例 8】数列$\{a_n\}$中，若$a_1=1$，且$na_{n+1}-(n+1)a_n=1(n\in\mathbf{N}^*)$，则$a_n=$_____.

解析：观察递推式，若a_{n+1}与$n+1$组合，a_n与n组合，则能构造前后项关系，可两端同除$n(n+1)$实现，

因为$na_{n+1}-(n+1)a_n=1$，所以$\dfrac{na_{n+1}-(n+1)a_n}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n(n+1)}$，故$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ ①，

把$\dfrac{a_n}{n}$整体看作b_n，则式①属于$b_{n+1}-b_n=f(n)$这类结构，可用累加法先求出b_n，进而得到a_n，

设$b_n=\dfrac{a_n}{n}$，则$b_1=\dfrac{a_1}{1}=1$，且式①即为$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}$，所以当$n\ge 2$时，

$b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1=-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n-2}-\cdots-\dfrac{1}{2}+1+1=2-\dfrac{1}{n}$，

又$b_1=1$也满足上式，所以$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有$b_n=2-\dfrac{1}{n}$，即$\dfrac{a_n}{n}=2-\dfrac{1}{n}$，故$a_n=2n-1$.

答案：$2n-1$

【反思】像大下标对应小系数，小下标对应大系数这种“系数交叉模型”，常通过除以系数构造新数列.

【变式】数列$\{a_n\}$中，若$a_1=\dfrac{1}{3}$，$2a_{n+1}a_n+a_{n+1}-a_n=0$，则$\{a_n\}$的通项公式为_____.

解析：为了把递推式中的$a_{n+1}a_n$分开，两端同除以$a_{n+1}a_n$，严谨考虑，先判断a_n能否为 0，

由$2a_{n+1}a_n+a_{n+1}-a_n=0$可得$a_{n+1}(2a_n+1)=a_n$，又$a_1=\dfrac{1}{3}>0$，结合$a_2(2a_1+1)=a_1$得$a_2=\dfrac{a_1}{2a_1+1}>0$，

同理，由$a_2>0$可得$a_3=\dfrac{a_2}{2a_2+1}>0$，由$a_3>0$可得$a_4=\dfrac{a_3}{2a_3+1}>0$，…，所以$\{a_n\}$为正项数列，

故在$2a_{n+1}a_n+a_{n+1}-a_n=0$两端同除以$a_{n+1}a_n$可得$2+\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=0$，所以$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=2$，

故$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是公差为 2 的等差数列，又$\dfrac{1}{a_1}=3$，所以$\dfrac{1}{a_n}=3+(n-1)\times 2=2n+1$，故$a_n=\dfrac{1}{2n+1}$.

答案：$\dfrac{1}{2n+1}$

【反思】遇到含 $a_n a_{n+1}$ 这种结构的递推公式，一种常见的变形思路是同除以 $a_n a_{n+1}$.

【总结】若题干给出的递推公式较复杂，则可对递推公式变形，化简递推公式，或构造出新数列来求通项，这类题往往变形并不复杂，常见的方法有因式分解、同除系数或某一项等.

强化训练

1．（2022·上海模拟·★★）在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_n=a_{n-1}+\lg\dfrac{n}{n-1}(n\geq 2)$，则 $a_{100}=$______.

2．（2023·全国模拟·★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$(2n-1)a_{n+1}=(2n+1)a_n$，则 $a_n=$______.

3．（2022·吉林长春模拟·★★）已知数列 a_1，$\dfrac{a_2}{a_1}$，$\dfrac{a_3}{a_2}$，…，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，…是首项为 1，公比为 2 的等比数列，则下列数中是数列 $\{a_n\}$ 中的项的是（　　）

（A）16　（B）128　（C）32　（D）64

4．（★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=2$，且 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列. 证明：$\{a_n+n\}$ 是等比数列，并求 a_n.

5．（2022·甘肃酒泉模拟·★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$. 设 $b_n=\dfrac{1}{a_n-1}$，证明 $\{b_n\}$ 是等差数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

6．（2023·江西南昌模拟·★★★）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，且$a_n=2a_{n-1}-n+2(n\geq 2)$.

（1）求a_2，a_3，并证明$\{a_n-n\}$是等比数列；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式.

7．（2022·全国模拟·★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{3}{2}$. 证明数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式.

8．（★★）设数列$\{a_n\}$满足$a_1=4$，$a_n=3a_{n-1}+2n-1(n\geq 2)$，求$a_n$.

9．（2023·全国模拟·★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}-2a_n=3^n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

10．（★★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$(2n-1)a_{n+1}-(2n+1)a_n=2$，求$a_n$.

11．（2022·全国模拟·★★★★）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$(n^2+1)a_{n+1}=2(n^2-2n+2)a_n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

12.（2023•福建质检•★★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=8$，$a_{2n-1}+a_{2n+1}=\log_2 a_{2n}$，$a_{2n}a_{2n+2}=16^{a_{2n+1}}$，证明：$\{a_{2n-1}\}$是等差数列.